Spontaneous Collapse of Supersymmetry in Thermal States

—熱力学的相と対称性，オーダー・パラメーター，中心分解を巡って—

小嶋　泉（京都大学数理解析研究所）

要　旨

量子場理論・量子統計力学を代数的に定式化する立場から，最初に以下のような基本的問題を考察する。

1) 量子物理学の基本概念とその定式化：最初から Hilbert 空間を持込むのではなく，「q-数」としての物理量を主軸に考える Dirac 本来の立場に立返って，時間発展，状態，状態ベクトル等の概念を記述する一般的手法について。

2) 熱力学的相の取扱いにおける熱力学的極限の問題：「熱力学的相」を確定し「相転移」を clear cut に扱うのに不可欠な熱力学的極限の取扱いと，その状況での熱平衡の定式化。

3) 熱力学的極限において，相がオーダーパラメータ＝centre によって一般的に特徴づけられること，および，超選択則＝中心分解の概念。純粋相・混合相とクラスター性との関係等について。

4) 相と対称性の自発的破れの概念との関係について。

上の議論の応用として，Bose／Fermi 超選択則が任意の空間並進不変状態で成立つこと，Bose 場と Fermi 場を相互に入替える「超対称性変換」が，真空 $T = 0°K$ を除く任意の空間並進不変状態において，従来知られていなかったタイプの強い自発的破れ（= spontaneous collapse）を常に被り，真空状況以外で超対称性変換を生成する supercharges は存在しない，という命題を講義の時に証明する。

1　量子論の代数的定式化

有限自由度 vs. 無限自由度：ユニタリー非同値表現の存在

有限自由度系と無限自由度系の本質的な違いは，（コンパクト多様体上の量子系は別として，通常の）有限自由度量子系を記述する物理量の代数が既約表現を本質的にただ１つしか持たないのに対して，**無限系は互いにユニタリー非同値な無数の表現を持つ**，というところにある。

前者における表現の一意性（Stone-von Neumann の定理）が，周知の「Dirac 変換理論」(i.e. 正準変数の取り方の違いはすべてユニタリー変換に帰着される）の数学的基礎をなす。

後者（ユニタリー非同値表現の存在）は，単に数学的レベルの問題ではなく，異なる表現を区別するパラメータが「オーダーパラメータ」として物理的な意義を持つ。e.g. 強磁性体の磁化の方向。

⇒ 「Dirac 変換理論」の破綻 ＝「初めに Hilbert 空間ありき」の破綻

⇓

ではどうするか？ ⇒ 「初めに q-numbers ありき」＝代数的定式化［実は，これこそが Dirac の元々の立場だった！］：表現に依らない「物理量そのもの」のなす（抽象）代数をそれ自体で考える。

1.1　「初めに algebras ありき」

通常の量子力学の教科書では，状態ベクトル（bra あるいは ket）の全体から成る（複素）Hilbert 空間から話を始めるのが，標準的なスタイルである［「初めに Hilbert 空間ありき」］。物理系を記述する力学変数は，このヒルベルト空間上に作用する線型演算子として定義される。

これに対して Dirac の教科書では，ミクロ量子系を記述する力学変数を，古典的な可換量としての "c-number" から区別された，非可換な "q-number" として抽象的に設定し，特定の表示に依ることなく symbolic な取扱いによって，量子論の理論構造を明快に説明した。「特定の表示によらない」symbolic method とは，"q-number" としての力学変数を，それらの間に成り立つ相互関係だけに着目して取り扱い，具体的にどのような演算子を用いて数学的に書き下すかは一切問わない，ということ。

ただし実際問題における物理量の「期待値」の計算には，「行列要素」が必要。その目的に Schrödinger 表示の持つ具体性が必要となるが，抽象的な見方は，こういう具体的表示とどう結びつくのか？両者のギャップを埋めて，抽象的な "symbolic method" と量子力学の具体的取扱いとの間の橋渡しをしたのは，同じ Dirac の「変換理論」であり，それによって "q-number" のさまざまな表示がすべて，ユニタリー変換によって相互に結ばれる。その数学的根拠は，正準交換関係 (CCR) $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ が定める代数 (CCR Algebra) の既約表現が，すべて互いにユニタリー同値となることを保証する **Stone-von Neumann の定理** [2] にある。この定理のお蔭で，予め Hilbert 空間を一つ決め，そこでの演算子による力学変数の任意の表現 (例えば， Schrödinger 表示) をとって議論を始めても一般性が失われなかったのである。ミクロの力学変数を "q-number" として symbolic に扱う初版での Dirac の斬新な立場が，以後の版 ([1]) では最終的に「初めに，bra と ket (の作る Hilbert 空間) ありき」＋「次に，q-numbers と変換理論」という常識的スタイルに後退したのは，この「具体性」の要求と「変換理論」の明快さに由来するものだろう。

しかるに，上の Stone-von Neumann 定理が成り立つのは自由度の数 N が有限の場合のみ！場の量子論のような無限自由度系では，まったく事情が異なる。ユニタリー非同値な表現が無数に存在し，「変換理論」で活躍するユニタリー変換によってそれらの間を結ぶことはもはやできない。かつ，非同値表現の存在という一見抽象的な数学上の問題が，例えばマクロ的な秩序パラメータの存在というような物理的状況と密接に結びついている。有限自由度の量子力学にとっては「高級」すぎた Dirac の symbolic method がその本来の役割を果たすべき場所は，「変換理論」が使えない無限自由度系だったのである。ここでは，「初めに Hilbert 空間ありき」ではなく，「初めに "q-number" の代数ありき」で出発しなければならない。こうして，ミクロ量子系を特徴づけ，その系の振舞を記述する基本概念は，非可換な掛算規則に従う力学変数としての "q-number" とそれらが作る代数構造だということになった。

1.2 状態＝期待値汎関数と GNS 構成法

Segal, Haag，荒木，Kastler 等によって 1950-60 年代に始められた「場の量子論の代数的定式化」あるいは "Algebraic Quantum Field Theory" [3] は，力学変数の作る (抽象的 C^*-) 代数を基本概念に採用することにより，期せずして Dirac の上の考え方に対して数学的な枠組を与えることとなった。これによって，物理学に現れる種々の概念の役割を深くかつ統一的に捉えることが可能となる。ただし，「初めに Hilbert 空間ありき」で出発する通常の量子論の記述形式が一旦体に染みついてしまうと，この「抽象的」枠組の中で「状態ベクトル」の概念は一体どうなるのか，ちょっと不安になるかもしれない。実はこれは「慣れ」の問題で，むしろ「通常の」理論形式の方が，物理的実体の不明な「状態ベクトル」などという抽象度の高いものをいきなり持ち出して，そこから議論を始める形をとっているのである。ここでの「状態」概念はもっと realistic に，与えられた状態において個々の物理量 A を反復測定した際得られる観測期待値 $\langle A\rangle$ を対応させ：$A \mapsto \langle A\rangle$，「すべての」物理量に亘るこの対応関係全体をひとまとめに考えた「期待値汎関数」という概念をもって，「状態」の数学的表現と考える。見掛けの抽象的外観に反して，より現実的状況に即した，むしろ「操作主義的」なニュアンスも含んだ記述法というべきものである。もう少し正確を期する

なら，状態 ω とは代数 $\mathfrak{A}$ 上で定義された線型汎関数

$$\mathfrak{A} \ni A \mapsto \omega(A) \in \mathbb{C} \qquad \text{such that}$$
$$\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\omega(A) + \beta\omega(B) \qquad \text{for } \forall A, B \in \mathfrak{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{1}$$

であって，正値の物理量 $A = B^*B \geq 0$ に対して非負の値を与え，

$$\omega(B^*B) \geq 0, \tag{2}$$

かつ，規格化条件

$$\omega(1) = 1 \tag{3}$$

を満たすもののことである。このような一般的意味での「状態」が与えられると，GNS (Gel'fand-Naimark-Segal) 構成法と呼ばれる数学的手法を用いて，状態ベクトルの作る Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ やこの状態 ω に対応する状態ベクトル Ω_ω，各物理量 $A \in \mathfrak{A}$ を Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega$ における線型演算子 $\pi_\omega(A)$ として表す $\mathfrak{A}$ の「表現」 π_ω を構成して，

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle \qquad (\text{for } \forall A \in \mathfrak{A}), \tag{4}$$
$$\overline{\pi_\omega(\mathfrak{A})\Omega_\omega} = \mathfrak{H}_\omega \tag{5}$$

という関係を満たすようにすることができる [4]。$\mathfrak{H}_\omega$ を GNS 表現空間，π_ω を GNS 表現，Ω_ω を巡回ベクトルと呼ぶ。この三つ組 $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ は，状態 ω を決めれば，ユニタリー変換の自由度を除いて (つまり，ユニタリー同値なものを同一視して) 一意的に定まり，ここから先は，基本的に通常の量子論における理論展開が再現可能となる。ただし，物理量の代数 $\mathfrak{A}$ のこの表現 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ は，状態 ω に依存して定まるもので，一般には ω が異なれば対応する表現は異なり，互いにユニタリー非同値にもなりうる。通常の量子力学における常識との本質的な違いがこの点にある。代数的定式化の見方では，このように，期待値汎関数としての状態の概念によって，対象系がおかれたさまざまな物理的状況をその観測期待値を通じて一般的に表現する一方，よく知られた状態ベクトルの Hilbert 空間と，そこでの線型演算子としての物理量の表現は，必要なら，与えられた状態 ω に応じて，いつでも構成することが可能である。こうして，物理量のなす一つの抽象代数 $\mathfrak{A}$ とその上の多様な状態 ω によって，ユニタリー非同値な表現も含めた全ての表現を，一挙に捉えることが可能になる。

1.3 純粋状態と混合状態の統一的記述

上のように一般的な意味で「状態」を定義すると，任意の二つの状態 ω_1, ω_2 に対して，その凸結合

$$\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2 \qquad (0 \leq \lambda \leq 1) \tag{6}$$

も，明らかに上の三つの条件 (1), (2), (3) を満たすので，これも一つの状態になる。つまり，$\mathfrak{A}$ 上の状態の全体 $E_\mathfrak{A}$ は凸集合をなし，この中には純粋状態も混合状態も区別なく入っているのである。この見方では，ω が純粋状態であるとは，もはやそれが式 (6) の形に (non-trivial に，すなわち，$\omega_1 \neq \omega_2, \lambda \neq 0, 1$ という意味で) 凸分解できないということ，つまり $E_\mathfrak{A}$ の「端点」であることとして，定義される。他方，通常の量子論では，「ベクトル状態は純粋状態，密度行列は混合状態」というのが「常識」である。しかるに GNS 構成法は，ω が純粋状態であるか混合状態であるかにかかわらず，すべて (4) のように「ベクトル状態」の形に書き表されることを主張する。密度行列で書かれた混合状態までが 1 個の状態ベクトル Ω_ω で表されるのは奇妙に思うかもしれないが，

これは別段不思議なことではない。例えば，ρ を Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の密度行列として，混合状態 $\omega(A) \equiv \mathrm{Tr}(\rho A)$ を考えると，$\rho^{1/2}$ は Hilbert-Schmidt class の演算子[1]の作る Hilbert 空間 $\mathcal{S}(\mathfrak{H})$ に属する「ベクトル」であって，$\Omega_\omega \equiv \rho^{1/2}$, $\pi_\omega(A)\xi \equiv A\xi$ $(\xi \in \mathcal{S}(\mathfrak{H}))$ とすれば，Hilbert-Schmidt 内積 $\langle \sigma, \tau \rangle_{H.S.} \equiv \mathrm{Tr}(\sigma^* \tau)$ を用いて

$$\langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle_{H.S.} = \mathrm{Tr}(\rho^{1/2} A \rho^{1/2}) = \mathrm{Tr}(\rho A) = \omega(A) \tag{7}$$

と書ける。逆に，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ がその部分空間 $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の直和

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}_N \tag{8}$$

になっているとき，物理量の代数 $\mathfrak{A}$ がこの直和分解に関して「ブロック対角的」

$$\mathfrak{A} \ni A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_N \end{pmatrix} \tag{9}$$

なら，状態ベクトル $\Psi = \sum_{i=1}^{N} {}^{\oplus}\Psi_i \in \mathfrak{H}$ は，$N > 1$ のとき $\mathfrak{A}$ 上の混合状態

$$\langle \Psi,\ A\Psi \rangle = \sum_i \langle \Psi_i,\ A_i \Psi_i \rangle = \mathrm{Tr}(\sum_i |\,\Psi_i\rangle\langle\Psi_i\,|\ A) \tag{10}$$

となるし，また，$N = 1$ で $\mathfrak{A} = B(\mathfrak{H})$ ならば，純粋状態になる。このように，ある状態が純粋か混合かということと，状態ベクトルで書けるか行列密度で書けるかということとは，どういう物理量の代数の上の状態と見ているかということと，それをどういう Hilbert 空間上で表現するかによって，いくらでも変わりうることである。つまり，物理量の代数との関係を離れて一つの状態ベクトル Ψ をいくらひねくり回してもそれが純粋状態であるか混合状態であるかはわからないのであって，上の「常識」は皮相な形式論にすぎない。この意味で「状態ベクトル」や「波動関数」なるものは，補助的な「数学的道具」に過ぎず，それ自体に深遠な意味を探ろうとする「哲学的議論」は徒労である。次の数学的帰結が示すように，純粋状態か混合状態かを判定するには，$\mathfrak{H}_\omega$ で表現された物理量の代数$\pi_\omega(\mathfrak{A})$ がその空間に働く演算子全体 $(B(\mathfrak{H}_\omega))$ の中で占める相対的な 'size'，つまり，代数の表現が「既約」であるか「可約」であるか，を問題にしなければならないのである。

$$\omega : \text{純粋状態} \iff \text{表現}\ (\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)\ \text{が既約} \tag{11}$$
$$\iff \pi_\omega(\mathfrak{A})' = \mathbf{C}1_{\mathfrak{H}_\omega} \tag{12}$$
$$\iff \pi_\omega(\mathfrak{A})'' = \overline{\pi_\omega(\mathfrak{A})}^{w} = B(\mathfrak{H}_\omega). \tag{13}$$

ただし，commutant $\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ は

$$\pi_\omega(\mathfrak{A})' \equiv \{B \in B(\mathfrak{H}_\omega); \pi_\omega(A)B = B\pi_\omega(A) \quad \text{for } \forall A \in \mathfrak{A}\} \tag{14}$$

によって定義される。Hilbert 空間の中で直交補空間をとる操作 $\mathfrak{K} \mapsto \mathfrak{K}^\perp$ を部分空間に２回施せばその閉包が得られる：$\mathfrak{K}^{\perp\perp} = \overline{\mathfrak{K}}$ が，ちそれと同じように，$\pi_\omega(\mathfrak{A})$ の commutant を２回とって得られる double commutant $\pi_\omega(\mathfrak{A})''$ は，演算子の弱収束に関する閉包 $\overline{\pi_\omega(\mathfrak{A})}^{w}$ になる (von Neumann の定理)[4]。上の結果により，ω が純粋状態か否かということは，《表現空間 $\mathfrak{H}_\omega$ 内の「すべての」演算子[2]が，($\mathfrak{H}_\omega$ の線型演算子として表現された) 系の物理量 $\pi_\omega(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$ の「関数」として，上の位相の意味で十分よく近似されるか否か？》ということに帰着される。これに対して，ω: 混

[1]$\mathrm{Tr}(A^* A) < \infty$ となるような演算子 $A \in B(\mathfrak{H})$ のこと。
[2]正確には，すべての有界演算子 $\in B(\mathfrak{H}_\omega)$。

合状態のときは，すべての (表現された) 物理量 $\pi_\omega(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ と可換で非自明な演算子 $\neq \lambda \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\omega}$ が存在し，$\pi_\omega(\mathfrak{A})' \neq \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\omega}$，したがって，手持ちの物理量のすべて $\pi_\omega(\mathfrak{A})$ を動員しても，$\mathfrak{H}_\omega$ の中の状態ベクトルを区別し切るだけの情報が得られない，ということになる。$\pi_\omega(\mathfrak{A})'$ のユニタリー演算子 $U \neq \lambda \mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\omega}$ で，

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle = \langle U\Omega_\omega, \pi_\omega(A)U\Omega_\omega \rangle \tag{15}$$

を満たすものが存在して，二つの相異なる状態ベクトル $\Omega_\omega, U\Omega_\omega$ が同じ一つの状態 ω を記述するのである。

1.4 古典系と量子系の統一的記述

代数的定式化のおかげで，古典系と量子系の関係も統一的に記述される。古典系ということを，物理量の代数 $\mathfrak{A}$ の可換性として理解すれば，(単位元をもつ C^*-代数の範疇では) $\mathfrak{A}$ はある (compact Hausdorff) 位相空間 Ω 上の連続関数全体 $C(\Omega)$ に一致することがわかる (Gel'fand の定理)[4]。注目すべきは，初めに関数空間などというものを仮定せず，単に抽象的な可換 (C^*-) 代数 $\mathfrak{A}$ という代数構造 (+ $\mathfrak{A}$ のノルム位相) だけから出発したにもかかわらず，$\mathfrak{A}$ にその上の連続関数環としての具体形を与えるような空間 Ω が自動的に出てきてしまう，という点である。この Ω とは $\mathfrak{A}$ 上の純粋状態の全体 (それを $Spec(\mathfrak{A})$ と書く) にほかならないが，χ ($\in E_\mathfrak{A}$) が純粋状態 $\in \Omega = Spec(\mathfrak{A})$ であるための条件は，可換代数の場合，χ が 'character' となる条件

$$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B) \qquad (A, B \in \mathfrak{A}) \tag{16}$$

と同値である。抽象的な可換 (C^*-) 代数 $\mathfrak{A}$ の元 A と「具体的」な連続関数環 $C(\Omega)$ の元 $\hat{A}$ とは，Gel'fand 変換と呼ばれる

$$\hat{A}(\chi) = \chi(A) \qquad (\chi \in \Omega) \tag{17}$$

の関係によって結ばれる。この対応によって $\mathfrak{A}$ 上の一般的な状態 ω は Ω 上の確率測度 μ_ω と次の関係で同一視される：

$$\omega(A) = \int_\Omega \hat{A}(\chi) d\mu_\omega(\chi). \tag{18}$$

純粋状態 $\chi \in \Omega$ とは，Ω 上の Dirac 測度 δ_χ にほかならない：$\delta_\chi(\hat{A}) = \hat{A}(\chi) = \chi(A)$. 一般の状態 ω に対応する GNS 表現は，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_\omega = L^2(\Omega, \mu_\omega)$ において，$(\pi_\omega(A)\xi)(\chi) \equiv \hat{A}(\chi)\xi(\chi)$ ($\xi \in \mathfrak{H}_\omega$)，巡回ベクトル $\Omega_\omega \in \mathfrak{H}_\omega$ は Ω 上で値 1 をとる定数関数で与えられ，$\pi_\omega(\mathfrak{A})'' = L^\infty(\Omega, \mu_\omega)$ となる。古典的な意味での「ゆらぎ」とは，確率測度 μ_ω の (台の) 広がりに対応する。この状態を純粋状態にまで分解してしまえば，得られるものは空間 Ω における広がりのない 1 点 χ であり，その上での GNS 表現空間 $\mathfrak{H}_\chi \simeq \mathbb{C}$ は 1 次元，$\pi_\chi(A) = \chi(A) = \hat{A}(\chi)$ で，そこにはもはや「ゆらぎ」・「構造」は残らない。これに対して，$\mathfrak{A}$ が量子系を記述する非可換代数ならば，もうこれ以上分解できない純粋状態 ω に到達するところまで完全に状態指定をし切ってもなお，そこには非自明な非可換代数構造をもった既約表現 $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ が残る。[「残る」というよりむしろ，この既約表現での量子論こそが「普通の」量子論としてイメージされてきたのであり，それが状態ベクトル＝純粋状態という「思い込み」をもたらす原因となったのであるが $\cdots$。] その非自明な「内部」構造こそが量子ゆらぎの本質をなす。

要は，このような代数的定式化によって，可換・非可換以外の点では何ら区別なく，古典系・量子系を同じ枠組の中で同等に取り扱うことができる。そのことによって両者の首尾一貫した対応関係と同時に，可換・非可換に由来する本質的な違いが明らかになる。これは特にミクロ・マクロの相互関係を考える上で重要な点である。

1.5 時間発展と状態変化：「初めにハミルトニアンありき」?

通常の物理学の議論では，物理系の時間発展= dynamics の本質を集約して表現するハミルトニアンが最も重要視される。 しかるに無限自由度系では，上述のように異なる状態に対応する表現が，常にユニタリー変換で結ばれるとは限らない。もし系の状態が，時間発展につれてユニタリー非同値な状態の間を渡り歩いて行くとすると，そのような時間発展を，通常のように ハミルトニアン $\hat{H}$ を生成演算子とするユニタリー時間発展 $e^{i\hat{H}t}$ を用いて記述することは不可能である。また，無限に広がった系の状態が空間的に一様ならば，それが真空状態でない限り，ゼロでないエネルギー密度を全空間から集めてくると，必ず無限大になるから，そうした状態の上でハミルトニアンを考えることには，数学的困難がつきまとう。このように考えると，1.1節で「初めにヒルベルト空間ありき」という「先入観」を疑ったように，ここでは「初めにハミルトニアンありき」という「信念」もまた疑ってかかる必要がある。

こうした一般的な文脈では，(これが最も一般性の高い記述というわけではないが) 時間発展の標準的な記述として $\mathfrak{A}$ 上の 1 径数自己同型群 $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が用いられる。α_t は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ の上への 1 対 1 写像で $\mathfrak{A}$ の代数構造を保ち，

$$\alpha_t(\lambda A+\mu B)=\lambda\alpha_t(A)+\mu\alpha_t(B), \tag{19}$$

$$\alpha_t(AB)=\alpha_t(A)\alpha_t(B), \qquad \alpha_t(A^*)=\alpha_t(A)^*, \tag{20}$$

$$\alpha_t(\mathbf{1})=\mathbf{1}, \tag{21}$$

かつ，実 1 変数パラメータ $t\in\mathbb{R}$ に関して群の性質

$$\alpha_s\circ\alpha_t=\alpha_{s+t} \quad (s,t\in\mathbb{R}), \qquad \alpha_{t=0}=\mathrm{id}_{\mathfrak{A}} \tag{22}$$

を満たすものである。例えば，

$$\alpha_t(A)\equiv e^{i\hat{H}t}Ae^{-i\hat{H}t} \quad (\text{for } A\in B(\mathfrak{H})) \tag{23}$$

とおけば，$\mathfrak{A}=B(\mathfrak{H})$ 上で定義された α_t のわかりやすい例が得られるが，対称性の自発的破れの現象から理解されるように $\mathfrak{A}$ 上の 1 径数自己同型群が常にこういう形に書けるとは限らない。もし ω が $\mathfrak{A}$ 上の 1 径数自己同型群 α_t の「不変状態」，つまり，$\omega=\omega\circ\alpha_t$ であれば，この α_t を上の標準的な形に帰着させるようなハミルトニアン H_ω を，いつでも「後から」構成することができる。すなわち

$$U_\omega(t)\Big(\pi_\omega(A)\Omega_\omega\Big)\equiv\pi_\omega(\alpha_t(A))\Omega_\omega \tag{24}$$

という関係によって「ユニタリー時間発展」 $U_\omega(t)$ が定義される。ω が不変 $\omega\circ\alpha_t=\omega$ という条件は，$U_\omega(t)$ のユニタリー性と等価であり，

$$U(t)\pi_\omega(A)U(t)^*=\pi_\omega(\alpha_t(A)) \tag{25}$$

という関係が成り立つ。さらに，時間 t についての適当な連続性条件があれば，

$$U_\omega(t)=e^{itH_\omega} \tag{26}$$

となるハミルトニアン H_ω が存在し，式 (25) は物理量に対する Heisenberg 運動方程式 (の積分形) にほかならない。ここから先は，通常の量子論の理論展開がそのまま再現できる。ただし，同じ一つの時間発展 α_t に対して，対応するハミルトニアン H_ω は，一般に状態 ω に応じて変わりうる，ということに注意する必要がある：例えば，ω が真空なら，(定義によって)$H_\omega\geq 0$ であるが，温度 $T\neq 0^\circ$ K の平衡状態では，後述の冨田・竹崎理論と呼ばれる一般論によって H_ω のスペクトルは原点に関して正負対称となることがわかる。

2 熱力学的極限における熱平衡状態の定式化：KMS条件

2.1 Gibbs の公式の限界

有限自由度系の記述において「Dirac 変換理論」の簡便さをもたらした物理量の代数に対する表現の本質的一意性は，統計力学を用いて異なる熱力学的相の存在を確かめたり相転移を記述しようとするとき，逆に足枷になる。有限系に留まる限り，熱力学的諸量の外部パラメータ依存性は一般に解析的であり，「熱力学的相」を確定し「相転移」を扱うための criterion を解析性の破れに基づいて簡潔に定式化するためには，系の体積を無限大に広げる「熱力学的極限」の導入が不可欠になるのである。

通常の統計力学で温度平衡を記述するのは，Gibbs ensemble による統計平均

$$\omega_\beta(A) = \mathrm{Tr}(e^{\beta(F-\hat{H})}A) \tag{27}$$

で与えられる混合状態 ω_β である。ただし，$\hat{H}$ はミクロ系のハミルトニアン，$\beta = 1/k_BT$，F は (Helmhotz の) 自由エネルギー。これを簡単に Gibbs 状態と呼ぼう。通常の解釈では，この ensemble に属するミクロ量子系のそれぞれは定まったエネルギーをもつ純粋状態にあるのだが，温度や熱的効果が現れるような現象論的レベルにおけるわれわれ人間の側の情報不足ゆえに，「粗視化」の近似操作として統計平均が入り込む，という見方をする。しかし，無限自由度系としての場の量子論をも考慮に入した視点に立つと，物理量の代数 $\mathfrak{A}$ 上でトレース Tr が定義できるとは限らないし，定義できたとしても，演算子 $e^{\beta(F-\hat{H})}$ に対してトレースがとれるためには，ハミルトニアン $\hat{H}$ は高々可算個の離散スペクトルに制限される。こういうわけで Gibbs 状態の式 (27) は，このままでは，無限自由度量子系を含めた一般の場合に意味をもたせることができない。そうした拡張のため，Haag-Hugenholtz-Winnink [6] が注目したのは，この Gibbs 状態から導かれる次のような関係式 [7] である：

$$\begin{aligned}\omega_\beta(A\alpha_t(B)) \quad \Big[&= \mathrm{Tr}(e^{\beta(F-\hat{H})}Ae^{it\hat{H}}Be^{-it\hat{H}}) \\ &= \mathrm{Tr}(e^{\beta(F-\hat{H})}e^{i(t-i\beta)\hat{H}}Be^{-i(t-i\beta)\hat{H}}A)\Big] \\ &= \omega_\beta(\alpha_{t-i\beta}(B)A).\end{aligned} \tag{28}$$

ただしこの式が意味をもつのは，B が時間発展 α_t に関して解析的な場合に限られる。勝手な $A, B \in \mathfrak{A}$ に対する条件を書き下すため，時間 t に関する複素平面で，実軸および虚軸の点 $-i\beta$ を通って実軸に平行な直線とによって挟まれた帯状領域 D_β を考え，《領域 D_β 内で解析的な関数 $F_{AB}(z)$ で，実軸上での境界値が $F_{AB}(t) = \omega_\beta(\alpha_t(B)A)$，$-i\beta$ を通る直線上での境界値が $F_{AB}(t-i\beta) = \omega_\beta(A\alpha_t(B))$ となるようなものが存在する》，という表現をとる [5]。この形の表現には，上に述べたような制約は何ら入ってこない。これを **KMS** (久保-Martin- Schwinger) **条件**，それを満たす状態を **KMS 状態**と呼ぶ。有限自由度系の Gibbs 状態 (27) が KMS 条件を満たすことは，上の式 (28) から明らか。また例えば，$\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{C})$ (= 有限次元正方行列の作る代数) のとき，逆に KMS 条件を満たす状態は Gibbs 状態に限ることも容易に示される。この意味で KMS 状態は，無限自由度系にも適用可能な形に Gibbs 状態を一般化して温度平衡状態を記述するものと考えることができる。この解釈は，例えば，dynamics に対する摂動のもとでの「平衡への回帰」という形で示される KMS 状態の安定性や，自由エネルギーについての変分原理との密接な関係を通じて正当化される [5]。

2.2 KMS 状態と富田・竹崎理論

次に，KMS 状態 ω_β が混合状態であることについて。対応する GNS 表現

$$\omega_\beta(A) = \langle\Omega_\beta, \pi_\beta(A)\Omega_\beta\rangle, \qquad \mathfrak{H}_\beta \equiv \overline{\pi_\beta(\mathfrak{A})\Omega_\beta} \tag{29}$$

は可約，つまり，$\pi_\beta(\mathfrak{A})$ の commutant $\pi_\beta(\mathfrak{A})'$ は非自明

$$\pi_\beta(\mathfrak{A})' \neq \mathbf{C}\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\beta} \tag{30}$$

である。もっと詳しく，冨田・竹崎理論 [4] によれば，$\mathfrak{M} \equiv \overline{\pi_\beta(\mathfrak{A})}^w = \pi_\beta(\mathfrak{A})''$ は，その communtant $\mathfrak{M}' = \pi_\beta(\mathfrak{A})'$ と次の意味で鏡像関係にあることがわかる。すなわち，$\mathfrak{H}_\beta$ には次の関係を満たすような反ユニタリー演算子 J が存在する：

$$Je^{-\beta H_\beta/2}A\Omega_\beta = A^*\Omega_\beta \qquad (\text{for } A \in \mathfrak{M}), \tag{31}$$

$$J\Omega_\beta = \Omega_\beta, \quad e^{itH_\beta}\Omega_\beta = \Omega_\beta, \tag{32}$$

$$J^2 = \mathbf{1}, \qquad \langle J\Phi, J\Psi\rangle = \overline{\langle\Phi, \Psi\rangle}, \tag{33}$$

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}', \quad e^{itH_\beta}\mathfrak{M}e^{-itH_\beta} = \mathfrak{M}, \tag{34}$$

$$JH_\beta J = -H_\beta. \tag{35}$$

ただし，H_β は，KMS 状態 ω_β に対する GNS 表現の中での時間発展の無限小生成子である。この演算子 J を modular conjugation operator という。最後の式から明らかなように，この場合の「ハミルトニアン」 H_β のスペクトルは正負対称である。これは「負エネルギー」の状態の存在を意味するが，それでもなお，KMS 状態は真空状態よりも高い安定性を示すことが知られている [5]。これは，状態の「安定性」をスペクトル条件 (エネルギーの正値性) のような形でしか理解しない「常識」の一面性を突くものといえる。KMS 条件 (28) は，トレースにまつわる制約を取り除くため，トレースを使わない形で温度平衡状態を特徴づける条件として持ち込まれたが，それから導かれた上の関係式だけからトレースとは無関係に，逆にもとの (28) 式を導くことも，当然ながら容易にできる。J や H_β の重要性はこれで理解できるとしても，これらの演算子が一体何を意味するものなのか，これだけでは了解し難いかもしれない。その理解の便宜のために，トレースを使って書かれたもとの (27) 式の場合に，これらがどういうものに対応するかを知っておくことは有益だろう。この場合，(7) に従うと，

$$\Omega_\beta = \rho_\beta^{1/2} = e^{\beta(F-\hat{H})/2}, \tag{36}$$

$$J\xi = \xi^*; \qquad e^{-\beta H_\beta}\xi = e^{-\beta\hat{H}}\xi e^{\beta\hat{H}} = e^{-\beta(\pi_l(\hat{H})-\pi_r(\hat{H}))}\xi \quad (\xi \in \mathcal{S}(\mathfrak{H})), \tag{37}$$

$$\mathfrak{M} = \pi_l(B(\mathfrak{H})); \ \ \mathfrak{M}' = \pi_r(B(\mathfrak{H})) \tag{38}$$

とすればよいことがわかる。ただし，$\pi_l(A)\xi \equiv A\xi$, $\pi_r(A)\xi \equiv \xi A$ $\quad$(for $\xi \in \mathcal{S}(\mathfrak{H})$) は，$\mathfrak{H}$ 上の作用素 A の Hilbert-Schmidt class 演算子上での左表現，右表現である。一番重要な式 (31) は

$$Je^{-\beta H_\beta/2}A\Omega_\beta = (e^{-\beta\hat{H}/2}Ae^{\beta(F-\hat{H})/2}e^{\beta\hat{H}/2})^* = A^*e^{\beta(F-\hat{H})/2} = A^*\Omega_\beta \tag{39}$$

として再現され，また，

$$H_\beta = \pi_l(\hat{H}) - \pi_r(\hat{H}) \tag{40}$$

と (37) から，式 (35) は容易に理解される。直観的にいうと，空間並進不変な無限自由度系に移行すると，式 (40) 右辺の $\hat{H}$ は空間体積とともに無限大になって意味を失うのだが，その差 H_β だけは体積無限大の極限でも生き残る，ということになる。

反ユニタリー演算子 J の意味と可換子環 $\mathfrak{M}'$ の物理的意味をもっとよく理解するためには，ブラックホール近傍の「真空」からの粒子生成についての Unruh-Hawking 効果を今の観点から見ておくと教訓的だが，ページ数の制限もあるので割愛する。

3 純粋相・混合相とオーダーパラメータ／中心分解／超選択則

$T = 0°K$ の真空状態の場合には，一般定理 [3] により，真空の一意性と，それが pure state であること，あるいは，対応する GNS 表現が既約であることとは同値であり，もし与えられた真空表現が既約でなければ，常にそれを複数の既約な真空表現の直和［「真空の縮退」！］の形に分解することが可能である。しかるに，(30) 式 あるいは (34) 式で述べたように，$T \neq 0°K$ における熱平衡状態としての KMS 状態はすべて混合状態で，その GNS 表現は可約だから，これ以上分解できない熱平衡状態の「単位」として「熱力学的純粋相」を定義しようとするとき，純粋状態／混合状態，既約表現／可約表現，という観点は役に立たない。そこで状態全体のつくる凸集合 $E_{\mathfrak{A}}$ の中で，逆温度 β における KMS 状態だけを集め，その全体を K_β と書くことにすると，明らかにこれ自身で凸（閉）集合になる。それだけではなく，K_β は "simplex" であって，K_β の任意の元に対してこの集合の内部での端点分解を考えるとそれが一意的に決まる，という非常に良い性質を持っていることが知られている [5]。［身近な分かり易い例で言うと，三角形，四面体は何れも simplex だが，例えば四角形は simplex ではない，等々。］よって，K_β の端点を（温度 $1/k_B\beta$ での）熱力学的純粋相と定義すればよい。このとき，KMS 状態 ω_β が純粋相であることと，それに対応する GNS 表現が "factor"，つまり，$\mathfrak{M} \equiv \pi_\beta(\mathfrak{A})''$ の centre $\mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ が trivial, $\mathfrak{Z} = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}_\beta}$，という条件と同値である [5]。そして，$K_\beta$ の中から純粋相を２つとってくると，それらは一致するか "disjoint" かの何れかに限られる [5]。disjoint というのは，単に「同値でない」という条件よりも強く，２つの状態に対応する GNS 表現からそれぞれの任意の部分表現を１つずつとってくると，常にそれらがユニタリー非同値，ということである。このとき，(この２つの GNS 表現の直和表現の) centre の中に，２つの相で異なる値をとるものが必ず存在する [8]。つまり，２つの相を区別するマクロの物理量がある，ということで，すなわち「オーダーパラメータ」にほかならない。もう一つ重要なのは，純粋相は空間並進に関するクラスター性，すなわち，空間的遠方で局所的物理量の間の相関が切れる，という性質を満たすということである：物理量 $A \in \mathfrak{A}$ の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ による空間並進を $A(\boldsymbol{x})$ と書くと ω が純粋相の時，

$$|\omega(A(\boldsymbol{x})B) - \omega(A(\boldsymbol{x}))\omega(B)| \underset{|\boldsymbol{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{41}$$

言葉を流用して，KMS 状態以外の場合にも，対応する GNS 表現が factor であるような状態を，一般的に「純粋相」とよぶことにする。上述のように，任意の真空状態は常にクラスター性を満たす純粋状態としての真空，すなわち，縮退なしの真空にまで一意的に分解することが可能であるが，真空でない一般の状態については，常に純粋状態にまで一意分解できるとは限らない。これに対して，任意の状態をクラスター性を満たす純粋相にまで一意的に分解することは，常に可能で，この分解は，可換代数である centre を「同時対角化」することに対応して「中心分解」と呼ばれる。

他方，centre が trivial でない場合というのは，オーダーパラメータの値が定まっていない状況である。上に述べたように，異なるオーダーパラメータに対応する状態相互は disjoint であって，系の物理量によってこれらの状態を相互に結びつけることはできないから，ちょうど式 (9) で考えた「ブロック対角的」な物理量の代数に対応する。そうすると，異なる成分間で状態ベクトルの superposition をとっても，直交性により密度行列で書いた混合状態に帰着してしまうことになり，これは「超選択則」の存在を意味する。

4 純粋相・混合相と対称性の破れ／Spontaneous Collapse＝新しい破れのパターン

以上の観点を踏まえて，物理系の対称性とその破れのパターンを整理しておこう。

対称性の破れのパターン：

i) 破れていない対称性を持つ純粋相 (unbroken symmetry)

ii) 純粋相において破れた対称性が適当な混合相を取ると回復する場合 (spontaneous symmetry breakdown)

周知の例）強磁性体における空間回転の破れとその回復：

ω_θ を $\theta(=(\vartheta,\varphi))$ 方向に磁化された強磁性体の状態とすると，オーダーパラメータ＝磁化 $\propto \theta$。$\Rightarrow$ この状態に対応する状態空間 $\mathcal{H}_\theta$ の中で空間回転は (θ 軸の周りの回転を除いて) 実現できない。[$\because$) $\mathcal{H}_\theta$ と「直交する」別の状態空間 $\mathcal{H}_{\theta'}$ に飛出すから。] しかし，このような状態をあらゆる立体角について平均した状態 $\omega = \int d\theta\, \omega_\theta$ は，任意の無限小回転 δ の下で不変：$\omega \circ \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega$ に対応する「拡大された」状態空間 $\int d\theta^{1/2}\, \mathcal{H}_\theta$ の中では，任意の空間回転の generator が存在する。

この ii) が，よく知られた「対称性の自発的破れ」にほかならない。ところが，

iii) これまで知られていなかった第３のケースとして spontaneous collapse
＝どのような混合相を取っても回復しない対称性

という場合があることが最近わかった [9]。ここでは紙幅の制限で，準備としての一般論しか説明できなかったが，夏の学校の講義では，以上の内容を踏まえて，対称性変換の代数的な定式化の方法，それを用いた spontaneous breakdown, spontaneous collapse の取り扱い法について説明する予定である。

参考文献

[1] P.A.M. Dirac : *The Principles of Quantum Mechanics* (1st. & 4th. eds.), Oxford University, 1930, 1958.

[2] 岩波講座現代物理学の基礎 [第２版] 4『量子力学 II』，岩波書店。

[3] R. Haag : *Local Quantum Physics–Fields, Particles, Algebras* (1st. & 2nd. eds.), Springer-Verlag, 1992, 1996；荒木不二洋：岩波講座現代の物理学 21 『量子場の数理』，岩波書店, 1993。

[4] 梅垣壽春・大矢雅則・日合文雄：『作用素代数入門』，共立出版, 1985。

[5] O. Bratteli and D.W. Robinson : *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vols.1 & 2, Springer-Verlag, 1979, 1981.

[6] R.Haag, N.M. Hugenholtz and M. Winnink : Comm. Math. Phys. **5**, 215(1967).

[7] R.Kubo : J. Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957); P.C. Martin and J.Schwinger : Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).

[8] D.Buchholz, Foundations and Recent Results in Algebraic Quantum Field Theory, Lecture Notes at RIMS, 1996.

[9] D.Buchholz and I.O., Spontaneous Collapse of Supersymmetry, hep-th/9701005, to appear in Nucl.Phys.B.